

M2 – MATHÉMATIQUES : les opérations sur les entiers et décimaux positifs

L'addition :

Exemple : Calculer $58,28 + 375 + 124,145 + 3279,4 =$

- 1) Poser l'opération en colonnes, en alignant les chiffres des unités (soulignés ci-dessus) ; placer tout de suite la virgule du résultat :

$$\begin{array}{r}
 58,28 \\
 375 \\
 124,145 \\
 + 3279,4 \\
 \hline
 \end{array}$$

- 2) Additionner colonne par colonne, en commençant par la droite. Lorsque la somme dépasse 9, placer une retenue en haut de la colonne précédente :

$ \begin{array}{r} 22 \quad 1 \\ 58,28 \\ 375 \\ 124,145 \\ + 3279,4 \\ \hline 3836,825 \end{array} $	<p style="margin-left: 20px;">\leftarrow retenues</p> <p>Colonne des millièmes : somme des chiffres = 5</p> <p>Colonne des centièmes : somme des chiffres = 12 : je pose 2 au résultat, je retiens 1 au-dessus des dixièmes</p> <p>Colonne des dixièmes : somme des chiffres (avec la retenue) = 8</p> <p>Colonne des unités : somme des chiffres = 26 : je pose 6 au résultat, je retiens 2 au-dessus des dizaines</p> <p>Colonne des dizaines : somme des chiffres (avec la retenue) = 23 : je pose 3, je retiens 2 au-dessus des centaines</p> <p>Colonne des centaines : somme des chiffres (avec la retenue) = 8</p> <p>Colonne des mille : somme des chiffres = 3</p>
---	--

La soustraction (nombres entiers) :

Exemple : Calculer $78\,539 - 46\,965 =$

$ \begin{array}{r} 78\,539 \\ - 46\,965 \\ \hline 31\,574 \end{array} $	<p>Colonne des unités : 9 moins 5 = 4</p> <p>Colonne des dizaines : 3 - 6, je ne peux pas. J'ajoute 10 dizaines au nombre du haut (retenue à côté du 3) et une centaine à celui du bas (retenue sous le 9), d'où 13 moins 6 qui donne 7</p> <p>Colonne des centaines : 5 - (9+1), je ne peux pas. J'ajoute un millier au nombre du haut (retenue à côté du 5) et un millier à celui du bas (retenue sous le 6), d'où 15 - 10 = 5</p> <p>Colonne des milliers : 8 - (6+1) = 8 - 7 = 1</p> <p>Colonne des dizaines de milliers : 7 - 4 = 3</p>
--	--

La soustraction (nombres décimaux) :

Comme pour l'addition, il faut aligner les chiffres des unités (soulignés ci-dessous).

Il peut être utile de donner la même longueur aux parties décimales, en les complétant par des zéros à droite :

Exemple 1 : $845,29 - 37,6416$

$$\begin{array}{r}
 845,29010 \\
 - 37,6416 \\
 \hline
 807,6484
 \end{array}$$

Exemple 2 : $739,101010 - 53,642$

$$\begin{array}{r}
 739,101010 \\
 - 53,642 \\
 \hline
 685,358
 \end{array}$$

La multiplication (nombres entiers) :

Poser et effectuer : 214×738

Cela revient à effectuer $214 \times (700 + 30 + 8)$

équivalent à : $214 \times (8 + 30 + 700)$

ou encore : $214 \times 8 + 214 \times 30 + 214 \times 700$

identique à : $214 \times 8 + (214 \times 3) \times 10 + (214 \times 7) \times 100$

	2 1 4		
	x 7 3 8		
214 x 8 →	1 7 1 2	← ligne 1	(voir explications ci-dessous)
214 x 3 x 10 →	6 4 2 0	← ligne 2	(voir explications ci-dessous)
214 x 7 x 100 →	1 4 9 8 0 0	← ligne 3	(voir explications ci-dessous)
	1 5 7 9 3 2	← ligne 4	(voir explications ci-dessous)

Ligne 1 : j'effectue 214×8 : $8 \times 4 = 32$; je pose **2** et je retiens 3 ; $8 \times 1 = 8$ et 3 (retenue) = 11 ; je pose **1** et je retiens 1 ; $8 \times 2 = 16$ et 1 (retenue) = 17

Ligne 2 : j'effectue $214 \times 3 \times 10$: je commence par multiplier par 10 en plaçant un zéro à la fin de la ligne, puis j'effectue 214×3 : $3 \times 4 = 12$; je pose **2** et je retiens 1 ; $3 \times 1 = 3$ et 1 (retenue) = 4 ; $3 \times 2 = 6$

Ligne 3 : j'effectue $214 \times 7 \times 100$: je commence par multiplier par 100 en plaçant deux zéros à la fin de la ligne, puis j'effectue 214×7 : $7 \times 4 = 28$; je pose **8** et je retiens 2 ; $7 \times 1 = 7$ et 2 (retenue) = 9 ; $7 \times 2 = 14$

Ligne 4 : j'effectue l'addition des 3 lignes : $1712 + 6420 + 1498 = 157932$

Nombres terminés par des zéros :

Poser et effectuer : 4500×370

On effectue 45×37 , sans s'occuper des zéros (on les remettra au bout du résultat) :

4 5	0 0	
x 3 7	0	
3 1 5		
1 3 5 0		
1 6 6 5 0 0 0		

Explication : effectuer 4500×370 revient à calculer $45 \times 100 \times 37 \times 10$, soit $45 \times 37 \times 100 \times 10$, soit $45 \times 37 \times 1000$
On effectue donc 45×37 , et on multiplie ensuite par 1000 en plaçant trois zéros à la fin

La multiplication (nombres décimaux) :

Poser et effectuer : $3,75 \times 5,4$

On effectue 375×54 , sans s'occuper des virgules

(dans 3,75 on a 2 chiffres après la virgule, et dans 5,4 on a un chiffre après la virgule : on placera donc la virgule du résultat de telle façon qu'il y ait $2+1 = 3$ chiffres après la virgule) :

3 7 5	
x 5 4	
1 5 0 0	
1 8 7 5 0	
2 0, 2 5 0	il y avait 3 chiffres en tout après les virgules des nombres donnés : je place donc la virgule à 3 chiffres de la fin

Donc $3,75 \times 5,4 = 20,250 = 20,25$

La division :

Rappels : 1) dans une division, le premier nombre (ci-dessous, 752,48) est le **dividende** : le deuxième nombre (ici, 3,2) est le **diviseur**, et le résultat est appelé **quotient**.

2) dans une division, le résultat ne change pas si on multiplie le dividende et le diviseur par le même nombre → Exemple : $10 : 2 = 5$ et $(10 \times 3) : (2 \times 3) = 5$ (30 : 6 font bien 5)

--ooOoo--

Poser et effectuer : $1752,58 : 3,2 =$

Etape 1 : on "chasse" les virgules en multipliant le dividende et le diviseur par 10 ou par 100 ou par 1000, etc. Ici, comme 752,58 a deux chiffres après la virgule, on multipliera les deux nombres par 100 :

$1752,58 : 3,2$ est équivalent à $(1752,58 \times 100) : (3,2 \times 100)$ soit **175258 : 320**

Pour la suite, il peut être utile de lister les 9 premiers multiples de 320 :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
320	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880

Etape 2 : On prend au dividende autant de chiffres que nécessaire pour obtenir un nombre plus grand que le diviseur

$$\begin{array}{r} \overbrace{1752} \text{ 58} \\ \underline{320} \\ \end{array} \quad 175 < 320 : \text{ On prend donc } 1752$$

Etape 3 : On regarde combien de fois le diviseur (320) est contenu dans le nombre sélectionné (1752) Ici, c'est 5 fois, car $320 \times 5 = 1600$. On enlève ensuite 1600 à 1752

$$\begin{array}{r} \overbrace{1752} \text{ 58} \\ - 1600 \\ \hline 152 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{320} \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow 320 \times 5 = 1600 ; \text{ j'écris } 5 \text{ au quotient et j'enlève } 1600 \text{ à } 1752 \\ \leftarrow \text{ j'effectue la soustraction} \end{array}$$

Etape 4 : On abaisse le chiffre suivant (ici, le 5)

$$\begin{array}{r} \overbrace{1752} \text{ 58} \\ - 1600 \\ \hline 152 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{320} \\ 5 \end{array} \quad \leftarrow \text{ j'abaisse le } 5$$

Etape 5 : Comme précédemment, on regarde combien de fois 320 est contenu dans 1525, puis on effectue la soustraction

$$\begin{array}{r} \overbrace{1752} \text{ 58} \\ - 1600 \\ \hline 1525 \\ - 1280 \\ \hline 0245 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{320} \\ 54 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ en } 1525, \text{ il y a } 4 \text{ fois } 320 ; \text{ j'écris } 4 \text{ au quotient} \\ \leftarrow 320 \times 4 = 1280 \\ \leftarrow \text{ j'effectue la soustraction} \end{array}$$

Etape 6 : On abaisse le chiffre suivant (le 8) et on recommence la même procédure

$\begin{array}{r} 175258 \\ - 1600 \\ \hline 1525 \\ - 1280 \\ \hline 02458 \\ - 2240 \\ \hline 0218 \end{array}$	$\begin{array}{r} 320 \\ \hline 547 \end{array}$	<p>← j'abaisse le 8</p> <p>← en 2458, il y a 7 fois 320 ; j'écris 7 au quotient</p> <p>← $320 \times 7 = 2240$</p> <p>← j'effectue la soustraction</p>
---	--	--

Etape suivante : Lorsque l'on a abaissé le dernier chiffre (le chiffre des unités, ici le 8), on peut continuer la division en abaissant des zéros, après avoir mis une virgule au quotient

$\begin{array}{r} 175258 \\ - 1600 \\ \hline 1525 \\ - 1280 \\ \hline 02458 \\ - 2240 \\ \hline 02180 \end{array}$	$\begin{array}{r} 320 \\ \hline 547, \end{array}$	<p>← j'abaisse un zéro et je mets une virgule au quotient</p>
--	---	---

Etapes suivantes : Je continue en utilisant toujours la même procédure :

$\begin{array}{r} 175258 \\ - 1600 \\ \hline 1525 \\ - 1280 \\ \hline 02458 \\ - 2240 \\ \hline 02180 \\ - 1920 \\ \hline 02600 \\ - 2560 \\ \hline 00400 \\ - 320 \\ \hline 80 \end{array}$	$\begin{array}{r} 320 \\ \hline 547,681 \end{array}$	<p>← en 2180, il y a 6 fois 320 ; j'écris 6 au quotient</p> <p>← $320 \times 6 = 1920$</p> <p>← j'effectue la soustraction et j'abaisse un autre zéro</p> <p>← en 2600, il y a 8 fois 320 ; j'écris 8 au quotient ; $320 \times 8 = 2560$</p> <p>← j'effectue la soustraction et j'abaisse un autre zéro</p> <p>← en 400, il y a 1 fois 320 ; j'écris 1 au quotient ; $320 \times 1 = 320$</p> <p>← j'effectue la soustraction</p>
--	--	---

→ **Résultat** : $1752,58 : 3,2 = 547,681$ (au millième près) ; il reste 80 millièmes.

Remarque : On aurait pu continuer la division, en abaissant encore d'autres zéros...

Cas particulier 1 : Le nombre obtenu après avoir abaissé le chiffre suivant est inférieur au quotient :

→ On écrit 0 au quotient et on abaisse tout de suite un autre chiffre :

$\begin{array}{r} 89475 \\ - 864 \\ \hline 3075 \\ - 3024 \\ \hline 0051 \end{array}$	$\begin{array}{r} 432 \\ \hline 207 \end{array}$	<p>← après avoir abaissé le 7, j'obtiens 307, qui contient 0 fois le diviseur 432 : J'écris donc 0 au quotient, et j'abaisse tout de suite le 5 pour continuer</p>
---	--	--

Cas particulier 2 : Le dividende est inférieur au diviseur :

→ Pour trouver le premier chiffre du quotient, on ne peut pas prendre au diviseur plus que ce que l'on a !

On écrit donc 0 au quotient, on met une virgule au quotient, et on place un zéro à droite du dividende :

Soit le dividende est alors supérieur au diviseur et on peut continuer la division normalement, soit il est toujours inférieur au diviseur : dans ce cas, on écrit à nouveau 0 au quotient et on met un autre zéro à droite du dividende

Exemple : $2,3 : 915,42$

Avant de poser la division, je multiplie les 2 nombres par 100 pour chasser les virgules :

$$2,3 : 915,42 = 230 : 91\,542$$

$$\begin{array}{r} \\ 2\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ -1\ 8\ 3\ 0\ 8\ 4 \\ \hline 0\ 4\ 6\ 9\ 1\ 6\ 0 \\ -\ 4\ 5\ 7\ 7\ 1\ 0 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 4\ 5\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{9\ 1\ 5\ 4\ 2} \\ 0,0\ 0\ 2\ 5 \end{array}$$

$230 < 91542$; j'écris 0 au quotient et je mets la virgule : $Q = 0,$

→ je place un premier 0 à droite du dividende, mais 2300 est toujours inférieur à 91542 ; j'écris un autre 0 au quotient : $Q = 0,0$

→ je place un deuxième 0 à droite du dividende, mais 23000 est toujours inférieur à 91542 ; j'écris un autre 0 au quotient : $Q = 0,00$

→ je place un troisième 0 à droite du dividende, maintenant le nombre obtenu (230 000) est supérieur au diviseur (il le contient 2 fois) :

Je peux alors continuer normalement la division